Théorème de Hadamard-Lévy

(Max de Maths.) [t.Q 2e ed].

Thm : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. LASSE

(i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

(ii) f est propre et df_x inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

↳ l'image réciproque par f de tout compact est compacte.

(i) ⇒ (ii) : f^{-1} est continue, donc f est propre (l'image réciproque d'un compact est fermée et bornée).

De plus, $id = f^{-1} \circ f$, donc $id = df^{-1}_{f(x)} \circ df_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: df_x est inversible.

(ii) ⇒ (i) : On va montrer que f est bijective. (i.e. $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\# f^{-1}(\{a\}) = 1$)

Quitte à regarder $x \mapsto f(x) - a$, on se ramène à étudier $S = f^{-1}(\{0\})$.

Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto -df_x^{-1}(f(x))$ ($\mathcal{C}^1$ car f de classe $\mathcal{C}^2$).

Soit $\varphi_t : x \mapsto \gamma_x(t)$ solution de $\begin{cases} \gamma_x'(t) = X(\gamma_x(t)) \\ \gamma_x(0) = x \end{cases}$ flot associé à X.

A x fixé, par Cauchy-Lipschitz, $t \mapsto \varphi_t(x)$ est bien définie sur un intervalle $[0, T^*[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $g : [0, T^*[\to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f \circ \varphi_t(x)$ ($\mathcal{C}^1$ par propriétés du flot).

$\forall t \in [0, T^*[$, $g'(t) = df_{\varphi_t(x)} \circ \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = df_{\varphi_t(x)} \circ X(\varphi_t(x)) = df_{\varphi_t(x)} \circ (-df_x^{-1}(f(\varphi_t(x)))) = -g(t)$.

Donc $g(t) = e^{-t} f(x)$, d'où $\varphi_t(x) \in f^{-1}(\overline{B}(0, \|f(x)\|))$ compact car f propre. $\forall t \in [0, T^*[$.

Par lemme de sortie de tout compact, $T^* = +\infty$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. La suite $(\varphi_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ vit dans $f^{-1}(\overline{B}(0, \|f(x)\|))$, donc, quitte à extraire via $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\varphi_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$.

Or $f(y) = \lim_{k \to +\infty} f(\varphi_{n_k}(x)) = \lim_{k \to +\infty} g(n_k) = \lim_{k \to +\infty} e^{-n_k} f(x) = 0$, donc $y \in S$.

Par théorème d'inversion locale, $\exists U$ v.o. de y, V v.o. de 0, $f_{|U} : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-difféo.

Lemme : Si $t_0 > 0$ tq $\varphi_{t_0}(x) \in U$, alors $\forall t \geq t_0$, $\varphi_t(x) \in U$.

$\{t \geq t_0, \varphi_t(x) \in U\} = \varphi_\cdot(x)^{-1}(U) \cap [t_0, +\infty[$ ouvert de $[t_0, +\infty[$.

$= \{t \geq t_0, \varphi_t(x) = f_{|U}^{-1}(f_{|U} \circ \varphi_t(x)) = f_{|U}^{-1}(g(t))\}$

$= \{t \geq t_0, \varphi_t(x) - f_{|U}^{-1}(e^{-t} f(x)) = 0\}$ fermé de $[t_0, +\infty[$.

Par connexité de $[t_0, +\infty[$, $\forall t \geq t_0$, $\varphi_t(x) \in U$

On a vu : $\varphi_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y \in U$. Soit k tq $\varphi_{n_k}(x) \in U$. Par lemme, $\forall t \geq n_k$, $\varphi_t(x) \in U$.

Donc $\forall t \geq n_k$, $\varphi_t(x) = f_{|U}^{-1}(e^{-t} f(x)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} f_{|U}^{-1}(\{0\}) = y$ car $f_{|U}$ $\mathcal{C}^1$-difféo

Notons $B_y = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y\}$ pour $y \in S$, non vide car $y \in B_y$.

- Si $x \in B_y$, alors $\varphi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y$ donc $\exists t_0 > 0$, $\varphi_{t_0}(x) \in U$, donc $B_y \subset \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \varphi_t^{-1}(U)$

Réciproquement, si $x \in \bigcup_{t>0} \varphi_t^{-1}(U)$, alors $\exists t_0 > 0$, $\varphi_{t_0}(x) \in U$ et par lemme, $\forall t \geq t_0$, $\varphi_t(x) \in U$ puis $\varphi_t(x) = f_{|U}^{-1}(e^{-t} f(x)) \longrightarrow f_{|U}^{-1}(0) = y$, donc $x \in B_y$.
Ainsi, $\forall y \in S$, B_y est ouvert., $B_y = \bigcup_{t>0} \varphi_t^{-1}(U)$.

Donc $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{y \in S} B_y$ union d'ouverts disjoints, donc par connexité, $|S| = 1$.
De là, f est bijective : le théorème d'inversion globale donne le résultat.